Письменный экзамен по курсу **Методы оптимизации**
Спецвариант (образец)

Критерии оценок

Кол-во выполненных заданий	1	2	3	4
Оценка **W**	**2.5**	**3.0**	**3.5**	**4.0**

1. В конечномерном пространстве R^n $(n = 2 \vee 3)$ поставлена задача минимизации **без ограничений**

$$J(u) \to \inf, \quad u \in R^n. \tag{1}$$

Найдите первую производную $J'(u)$ и вторую производную $J''(u)$. Исследуйте функцию $J(u)$ на выпуклость и сильную выпуклость. Найдите нижнюю грань функции J_*, множество оптимальных решений U_* и оптимальное решение $u_* \in U_*$ с минимальной нормой.

2. Примените к задаче минимизации функции (1) **метод скорейшего спуска**. Начальная точка u_0 задается. Найдите градиент $J'(u_0)$, шаг спуска

$$\alpha_0 = \operatorname*{argmin}_{\alpha \geqslant 0} J(u_0 - \alpha J'(u_0)), \tag{2}$$

следующее приближение $u_1 = u_0 - \alpha_0 \, J'(u_0)$ и соответствующее ему значение функции $J(u_1)$. Определите, будет ли u_1 оптимальным решением задачи (1).

3. В пространстве R^n задано множество

$$U = \{u \in R^n \mid g(u) \leqslant 0\}. \tag{3}$$

Исследуйте множество U на выпуклость, замкнутость, ограниченность и компактность. Покажите, что задача минимизации функции $J(u)$ с ограничениями (3) регулярна и решите ее с помощью **правила множителей Лагранжа**, взяв (в силу регулярности) $\lambda_0 = 1$. Найдите нижнюю грань функционала J_*, множество оптимальных решений U_* и соответствующее значение множителя Лагранжа λ^*, отвечающего за ограничение (3).

4. Поставьте двойственную к (1),(3) задачу максимизации

$$\psi(\lambda) \to \sup, \quad \lambda \in \Lambda. \tag{4}$$

Приведите явные выражения для функции $\psi(\lambda)$ и множества Λ. Найдите верхнюю грань $\psi^* = \sup\limits_{\lambda \in \Lambda} \psi(\lambda)$ и множество оптимальных решений Λ^* двойственной задачи (4).